

SEMINARIO DE SISTEMAS DINÁMICOS
CUESTIONARIO

1. Las ecuaciones de movimiento del péndulo simple son de la forma,

$$\frac{d\varphi}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 \sin \varphi,$$

donde φ es el ángulo que forma el vástago del péndulo con la vertical ($\varphi = 0$ corresponde al estado de reposo) y ω_0 es un parámetro.

- (a) ¿Es un sistema a tiempo continuo o discreto?
 - (b) ¿Qué variables determinan el estado dinámico del péndulo?
2. Dado el sistema dinámico discreto $([0, 1], f)$, donde f es la parábola logística,

$$f(x) = 4x(1 - x),$$

se pide:

- (a) ¿Es este sistema inversible?
 - (b) Calcular los tres primeros puntos de la órbita de $x = 0.3$.
 - (c) ¿Qué tipo de órbita tiene el punto $x = 0.5$?
3. Dado el sistema dinámico discreto $([0, 1], g)$ con $g(x) = 3x(1 - x)$,
- (a) Calcular sus puntos fijos.
 - (b) ¿Son estables o inestables?
4. ¿Por qué son importantes los atractores en la teoría de sistemas dinámicos?
5. ¿Qué miden los exponentes de Lyapunov de un sistema dinámico?
6. Sea μ una medida sobre un espacio medible (Ω, \mathcal{B}) , donde Ω es un conjunto vacío y \mathcal{B} una σ -álgebra de subconjuntos de Ω , y sea $f : \Omega \rightarrow \Omega$ una transformación medible.
- (a) ¿Qué significa que μ es invariante (con respecto a f)?
 - (b) ¿Qué significa que una propiedad se cumple “casi para todo $x \in \Omega$ ”?
7. ¿Qué significa que una medida invariante es ergódica? ¿Cómo se calcula la medida natural de un atractor caótico?
8. ¿A qué se debe el que la imagen de la transparencia 40 se repita después de 300 iteraciones del ‘cat map’, a pesar de que esta transformación es caótica?
9. ¿Cómo se genera el diagrama de bifurcaciones de Feigenbaum? ¿Qué es lo que muestra?
10. Dar tres ejemplos de sistemas dinámicos discretos caóticos, con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.